Epreuve de Mathématiques (durée conseillée 1h30)

PARTIE I

On considère la famille de fonctions (f_λ) dépendant du paramètre réel positif λ, définies pour tout $x \geq 0$ par

$$f_\lambda(x) = \lambda^2 x\, e^{-\lambda x}.$$

1.– Tracer les courbes représentatives des fonctions f_λ. Déterminer les points M_λ à tangente parallèlle à l'axe Ox. Montrer que ces points M_λ sont situés sur une courbe dont on donnera l'équation.

2.– Pour tout entier k, on considère l'intégrale I_k définie par

$$I_k = \int_0^{+\infty} x^k f_k(x)\, dx.$$

a) Par une intégration par parties, calculer l'intégrale I_0.

b) Déterminer une relation entre I_{k+1} et I_k.

c) Calculer I_k pour tout entier k.

PARTIE II

1.– Soit X une variable aléatoire de densité f donnée par

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ f(t) = f_\lambda(t) = \lambda^2 t\, e^{-\lambda t} & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

Calculer l'espérance et la variance de X.

2.– Soit n un entier positif et soient $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ n variables aléatoires indépendantes de même loi de densité f, définies sur un même espace de probabilité Ω et soit U la variable aléatoire définie par

$$U = \inf_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

Pour tout réel u, on désigne par $(U > u)$ l'événement défini par

$$(U > u) = \{\omega \in \Omega,\, U(\omega) > u\}.$$

a) Montrer que l'événement $(U > u)$ vérifie

$$(U > u) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} (X_i > u).$$

b) En déduire la fonction de répartition et la densité de la variable aléatoire U.

3.– Un appareil possède 3 composants indépendants. Chacun de ces composants a une durée de vie dont la densité de probabilité est f. L'appareil tombe en panne dès que l'un au moins des composants est en panne.

a) Déterminer l'espérance de vie de l'appareil.

b) A l'instant $t = 1$, on suppose que l'appareil est encore en état de marche. Donner la probabilité que l'appareil fonctionne à l'instant $t = 2$.

FIN